

Fábio Henrique Souza

**Sobre o Significado Físico do Potencial de Källén-Sabry
e o Efeito do Tamanho Finito do Núcleo
no Espalhamento de Íons Pesados**

Dissertação apresentada ao departamento de
física como parte dos requisitos necessários
à obtenção do grau de mestre em física.
Universidade Federal da Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Jair Lucinda.

Curitiba
2003


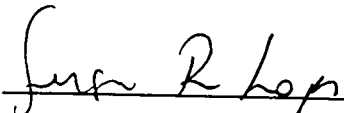

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

ATA DE DEFESA DE DESSERTAÇÃO DE MESTRADO

FÁBIO HENRIQUE DE SOUZA

TÍTULO: “SOBRE O SIGNIFICADO FÍSICO DO POTENCIAL DE KALLEN-SABRY E O EFEITO DO TAMANHO FINITO DO NÚCLEO NO ESPALHAMENTO DE ÍONS PESADO.”

Em sessão pública iniciada às dez horas, nesta data, após um Seminário sob o título acima, e Posterior arguição por esta banca examinadora, esta decidiu atribuir ao candidato o conceito global A.

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. JAIR LUCINDA (Orientador/Presidente) (UFPR)		<u>A</u>
Prof. SÉRGIO ROBERTO LOPES (UFPR)		<u>A</u>
Prof. TOBIAS FREDERICO (ITA)		<u>A</u>

Curitiba, 10 de março de 2003.

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos a parte elétrica do potencial de polarização do vácuo, considerando o núcleo atômico como sendo uma distribuição esférica e homogênea de cargas. A diferença entre este potencial e o potencial de Uehling, que é o primeiro termo da expansão do potencial de polarização do vácuo para um núcleo pontual, é calculada numericamente e comparada com o potencial de Källén-Sabry, que é o segundo termo da mesma expansão. Verifica-se que este potencial não pode representar uma correção devido tamanho finito do núcleo. A seção de choque simetrizada que leva em conta os efeitos do potencial de polarização do vácuo é desenvolvida até chegar a uma formato que permite a obtenção de resultados numéricos. O desvio percentual desta seção de choque em relação a seção de choque Mott, a qual leva em conta apenas a interação coulombiana é calculado numericamente e o resultado reforça a conclusão de que o potencial de Källén-Sabry não pode representar uma correção devido ao tamanho finito do núcleo.

Abstract

In this work, we develop the electric part of vacuum-polarization potential for a nucleus with a spherical and homogeneous distribution of charges. The difference between this potential and the Uehling potential, which is the first term of the point-nucleus expansion of the vacuum-polarization potential, is calculated numerically and compared with the Källén-Sabry potential, which is the second term of same expansion. We verify what this potential does not represent a correction due to the finite size of the nucleus. The symmetrical cross section what taken into account vacuum-polarization potential effect is developed to a convenient form in order to perform the numerical calculation. The deviation, in percentage of this cross section with respect to the Mott cross section, which taken into account only Coulomb interaction, is determined numerically and the result reinforce the conclusion that the Källén-Sabry potential does not represent a correction due to the finite size of the nucleus.

Índice

1. Introdução	4
2. Efeito do Tamanho Finito do Núcleo no Potencial de Polarização do Vácuo.....	8
2.1. Potencial de Polarização do Vácuo para uma Esfera com Distribuição Homogênea de Cargas	10
2.2. Potencial de Polarização do Vácuo para um Núcleo Pontual.....	13
3. Cálculo Numérico do Potencial de Polarização do Vácuo	15
4. Efeito do Potencial de Polarização do Vácuo e do Tamanho Finito do Núcleo no Espalhamento de Íons Pesados	20
4.1. Seção de Choque de Espalhamento	22
4.2. Cálculo Numérico da Seção de Choque de Espalhamento	26
5. Conclusão	35
Apêndice A	37
Apêndice B	39
Apêndice C	41
Apêndice D	46
Apêndice E.....	48
Referências Bibliográficas.....	49

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação, nós desenvolveremos o potencial de polarização do vácuo considerando o núcleo como sendo uma distribuição finita de cargas ao invés de considerá-lo como sendo um ponto e verificaremos qual é o efeito disto no potencial de polarização do vácuo e sua consequência no espalhamento de íons pesados.

O potencial de polarização do vácuo é o potencial devido as flutuações do vácuo nas proximidades do núcleo atômico [1]. Em termos modernos o vácuo consiste de um agregado polarizável de partículas virtuais que flutuam aleatoriamente. Partículas virtuais são partículas que surgem espontaneamente, existem por um breve intervalo de tempo e então desaparecem. Seu tempo de vida será tanto menor quanto maior for sua massa. As partículas virtuais transportam as forças fundamentais entre as partículas reais. Elas são criadas a partir de flutuações de energia de acordo com o princípio da incerteza de Heisenberg. Por não conservarem energia e momento dentro do limite permitido pelo princípio da incerteza, elas são chamadas partículas virtuais.

Os pares virtuais elétron-pósitron que são criados nas proximidades do núcleo atômico, comportam-se de tal maneira que os elétrons tendem a ser atraídos pelo núcleo enquanto que os pósitrons tendem a ficar mais afastados [2]. Como resultado, a carga observada no núcleo é menor que a esperada, pois a carga positiva do núcleo é parcialmente cancelada pela carga negativa dos elétrons virtuais que o circulam. Esta situação é análoga aquela de uma partícula carregada em um meio dielétrico, cuja carga é igual a carga original dividida por ϵ , sendo que ϵ é a constante dielétrica do meio em questão. Em outras palavras, devido a presença dos pares virtuais elétron-pósitron, o espaço na vizinhança do núcleo comporta-se como um meio dielétrico.

A noção de partículas virtuais não é somente uma construção teórica, ela realmente implica em efeitos observáveis. A seguir listamos alguns fenômenos físicos onde a polarização do vácuo tem um importante papel:

- O efeito Casimir [3] (no qual duas placas condutoras não carregadas se atraem no vácuo com uma força que varia com o inverso da quarta potência da sua distância de separação).
- O Lamb Shift [2] (onde a polarizabilidade eletrostática das flutuações de partículas virtuais é mensurável).
- O aparecimento da força de Van der Waals para sistemas cuja função de onda é esfericamente simétrica [4].
- A espontânea emissão de fótons por átomos excitados [5].
- O rearranjo do espectro atômico, o cálculo de níveis de energia atômicos exóticos (e eletrônicos) e a espectroscopia de íons multi-carregados [6].

Enfim, nosso conhecimento fundamental das leis da natureza tem passado por uma quase invisível revolução, onde a polarização do vácuo tem se tornado parte integrante da nossa visão dos fenômenos físicos.

O efeito da polarização do vácuo foi analisado experimentalmente por Vetterli et. al. [7] no espalhamento de $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{C}$ em baixas energias. A polarização do vácuo tem um importante papel no trabalho de Hussein et. al. [8], onde foi proposto um teste para confirmar a existência da força colorida de van der Waals, através do espalhamento de $^{208}\text{Pb} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$ em baixas energias. O limite superior para a intensidade da força colorida de van der Waals foi medido em um experimento efetuado em GANIL [9]. A precisão angular envolvida no experimento de GANIL, o qual apontava o teste de Hussein et. al., é $< 0,08$ graus. Neste caso o efeito do tamanho finito do núcleo necessita de uma cuidadosa análise, de modo a fazer uma distinção entre os efeitos da força colorida de van der Waals e da polarização do vácuo.

Quando uma partícula carregada é espalhada por outra partícula carregada com uma pequena transferência de momento, não há desvio do espalhamento clássico. Quando a transferência de momento é suficientemente grande, ou equivalentemente, quando o parâmetro de impacto é suficientemente pequeno, a partícula penetra na nuvem de pares virtuais elétron-pósitron que circulam o núcleo alvo, resultando num desvio do espalhamento clássico. Neste caso, o efeito da distribuição finita de cargas no núcleo atômico e a polarização do vácuo devem ser levados em conta. Trabalharemos com energias abaixo da barreira de Coulomb, sendo que esta é a energia máxima com a qual

podemos trabalhar, sem que seja necessário levar em conta a interação nuclear de curto alcance e detalhes da distribuição de matéria nuclear. Em outras palavras, trabalhando com energias abaixo da barreira de Coulomb, poderemos desprezar a interação nuclear de curto alcance e considerar o núcleo como sendo uma distribuição esférica e homogênea de cargas. Nestas condições, o potencial coulombiano é dominante e o potencial de polarização do vácuo deverá causar um pequeno desvio do espalhamento clássico.

Nesta dissertação a ordem de apresentação será como segue: no capítulo 2 a parte elétrica do potencial de polarização do vácuo, que é a responsável por alterações no potencial coulombiano, é desenvolvida considerando o núcleo atômico como sendo uma distribuição esférica e homogênea de cargas, até chegar a uma equação já encontrada na literatura [1], onde também podemos encontrar os potenciais de Uehling [10] e de Kállén-Sabry [11], que são respectivamente o primeiro e o segundo termo da expansão do potencial de polarização do vácuo para um núcleo pontual.

No capítulo 3, os potenciais de Uehling, Kállén-Sabry e o potencial exato que leva em conta o tamanho finito do núcleo são calculados numericamente. As integrais que aparecem nestes potenciais são calculadas usando o método da quadratura de Gauss, obtendo-se resultados que conferem com os que foram obtidos por Fullerton e Rinker [12]. São então mostrados dois gráficos: o primeiro mostra as contribuições percentuais dos potenciais de Uehling e de Kállén-Sabry, normalizadas em relação ao potencial coulombiano. O segundo gráfico mostra uma comparação entre contribuições percentuais do potencial de Kállén-sabry e da correção exata que leva em conta o tamanho finito do núcleo, onde são considerados os núcleos de chumbo, cobre, carbono e hélio. Verifica-se que a correção dada pelo potencial de Kállén-Sabry é diferente da correção exata. Além disso, o potencial de Kállén-Sabry permanece o mesmo para todos os núcleos, enquanto a correção exata varia conforme o núcleo considerado.

No capítulo 4, o desvio angular do espalhamento clássico, devido ao efeito do potencial de polarização do vácuo e a correspondente seção de choque simetrizada no referencial do centro de massa, são desenvolvidos usando um tratamento semi-clássico já encontrado na literatura [13,14,15]. A seção de choque simetrizada, que leva em conta o efeito do potencial de polarização do vácuo é calculada numericamente utilizando a quadratura de Gauss e comparada com a seção de choque Mott, que leva em conta apenas

a interação coulombiana. Inicialmente calcula-se a razão entre a diferença e a soma destas seções de choque, para o espalhamento de $^{208}\text{Pb} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$ considerando o efeito do potencial de polarização do vácuo que leva em conta o efeito do tamanho finito do núcleo. A curva obtida confere com a que foi obtida por Hussein et. al. [8]. O desvio percentual da seção de choque Mott, devido ao efeito do potencial de polarização do vácuo é então calculado e são obtidas curvas para os espalhamentos de $^{208}\text{Pb} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$ e $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{C}$ sendo que esta última difere muito pouco da curva experimental obtido por Vetterli et. al. [7]. A seguir, o desvio percentual da seção de choque Mott, relativo ao efeito do potencial de Kállén-Sabry é comparado com o mesmo desvio percentual, porém relativo a correção exata que leva em conta o efeito do tamanho finito do núcleo. Novamente verifica-se que a correção dada pelo potencial de Kállén-Sabry é diferente da correção exata que leva em conta o efeito do tamanho finito do núcleo, pois as curvas obtidas não coincidem nem no espalhamento de $^{208}\text{Pb} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$ nem no espalhamento de $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{C}$.

No capítulo 5 são discutidos todos os resultados obtidos na dissertação e chega-se a conclusão de que o potencial de Kállén-sabry não representa uma correção devido ao tamanho finito do núcleo.

Capítulo 2

Efeito do Tamanho Finito do Núcleo no Potencial de Polarização do Vácuo

A criação de pares virtuais elétron-pósitron nas proximidades do núcleo atômico implica na existência de uma carga induzida proveniente dos elétrons virtuais que são atraídos pelo núcleo [2]. Como consequência há um desvio da lei de Coulomb. Quem primeiro investigou a correção do potencial de Coulomb devido aos efeitos da polarização do vácuo foi Uehling [10] em 1935, que obteve um potencial modificador do potencial coulombiano. Anos mais tarde (como veremos na seção 2.2), o potencial de polarização do vácuo foi expandido em série de potências considerando o núcleo como sendo pontual. O termo principal desta expansão corresponde exatamente ao potencial de Uehling. Antes disso na seção 2.1, o potencial de polarização do vácuo será desenvolvido considerando o núcleo como sendo uma distribuição esférica e homogênea de cargas. Na eletrodinâmica quântica, o termo principal renormalizado do potencial de polarização do vácuo em unidades naturais é dado pelo tensor [16]

$$A_{\mu}^{(vp)} = \frac{\alpha}{2\pi} |\mathbf{p}|^2 \int_0^1 \frac{2w^2(1-w^2/3)}{4 + |\mathbf{p}|^2(1-w^2)} A_{\mu}(\mathbf{p}) dw, \quad (2.1)$$

onde A_{μ} e $A_{\mu}^{(vp)}$ são as μ -ésimas componentes do quadrivetor potencial, sendo que o índice μ varia de 0 a 3, α é a constante de estrutura fina e \mathbf{p} é o vetor momento. No sistema de unidades naturais temos $\hbar = m_e = c = 1$ onde \hbar é a constante de Planck dividida por 2π , m_e é a massa do elétron e c é a velocidade da luz no vácuo. Neste sistema de unidades temos:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = e^2 \approx \frac{1}{137,0364}; \quad (2.2)$$

$$\lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c} = 1, \quad (2.3)$$

onde e é a carga elementar e λ_e é o comprimento de onda Compton reduzido do elétron. Para uma distribuição de carga $\rho(\mathbf{r}')$, a parte elétrica do quadrvetor potencial de polarização do vácuo, que é a responsável por alterações no potencial coulombiano, pode ser escrita como [1]

$$V_{vp}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha^2}{\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\int_0^1 \frac{w^2 (1 - w^2/3)}{(1 - w^2)} \exp\left(-\frac{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\sqrt{1 - w^2}}\right) dw \right] d^3\mathbf{r}', \quad (2.4)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição do ponto onde queremos calcular o potencial, \mathbf{r}' é o vetor posição de um ponto qualquer dentro da distribuição de cargas e $\int \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = Z$, sendo que Z é o número atômico. A constante λ_e é igual a 1 e por isto não aparece no denominador do argumento da exponencial. Com o objetivo de fazer o λ_e aparecer, a partir de agora usaremos unidades onde $\hbar = c = 1$ e $m_e \approx 0,511 \text{ MeV}$, tal que

$$\lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{1}{m_e} \approx 1,957 \text{ MeV}^{-1}. \quad (2.5)$$

Em unidades usuais $\lambda_e \approx 386,159 \text{ fm}$, sendo que $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ Fermi}$. Assim a relação entre as unidades MeV^{-1} e fm é dada por

$$1 \text{ fm} \approx \frac{1,957}{386,159} \text{ MeV}^{-1} \approx 5,068 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-1}. \quad (2.6)$$

Neste sistema de unidades a equação (2.4) torna-se

$$V_{vp}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha^2}{\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\int_0^1 \frac{w^2(1-w^2/3)}{(1-w^2)} \exp\left(-\frac{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\lambda_e \sqrt{1-w^2}}\right) dw \right] d^3r' \quad (2.7)$$

e fazendo a mudança de variáveis $w = \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}$, temos

$$V_{vp}(\mathbf{r}) = -\frac{2\alpha^2}{3\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\int_1^\infty \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) \exp\left(-\frac{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\lambda_e} t\right) dt \right] d^3r'. \quad (2.8)$$

Para simplificar a expressão definimos

$$\chi(n, x) = \int_1^\infty \frac{1}{t^n} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) \exp(-xt) dt \quad (2.9)$$

e assim (2.8) pode ser escrita como

$$V_{vp}(\mathbf{r}) = -\frac{2\alpha^2}{3\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \chi\left(1, \frac{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\lambda_e}\right) d^3r'. \quad (2.10)$$

A função $\chi(n, x)$ será muito útil aqui e nas próximas seções, pois permite a compactação de algumas equações e torna mais fácil a lógica de programação.

2.1. Potencial de Polarização do Vácuo para uma Esfera com Distribuição Homogênea de Cargas

Mais adiante no capítulo 4, trabalharemos com espalhamento em energias abaixo da barreira de Coulomb, o que torna desnecessário levar em conta detalhes da distribuição de cargas no núcleo. Inicialmente, consideraremos o núcleo como uma distribuição esférica de

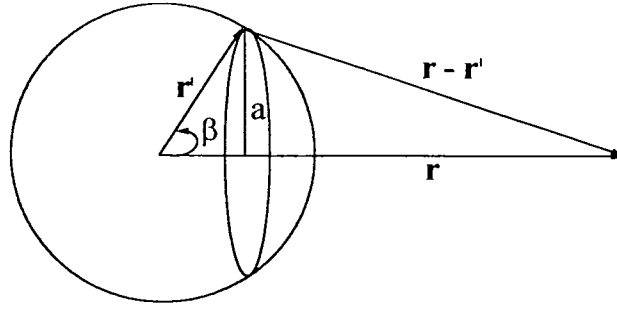


Figura 2.1 Sistema de coordenadas utilizado para efetuar a parte angular da integração da equação (2.8), onde o núcleo atômico é considerado como uma distribuição esférica de cargas, centrada na origem.

cargas centrada na origem. Assim a parte angular da integração em (2.8) pode ser efetuada.

De acordo com a figura 2.1 temos:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \beta}, \quad (2.11)$$

$$d^3r' = 2\pi r' dr' d\beta = 2\pi (r')^2 \sin \beta d\beta dr', \quad (2.12)$$

$$V_{vp}(r) = -\frac{4\alpha^2}{3} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{\rho(r')(r')^2 \sin \beta}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \beta}} \times \left[\int_1^\infty \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) \exp\left(-\frac{2\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \beta}}{\lambda_e} t\right) dt \right] d\beta dr'. \quad (2.13)$$

Podemos mudar a ordem de integração na equação (2.13) e coloca-la na forma

$$V_{vp}(r) = -\frac{4\alpha^2}{3} \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) \rho(r')(r')^2 \times \left[\int_0^\pi \frac{\sin \beta}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \beta}} \exp\left(-\frac{2\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \beta}}{\lambda_e} t\right) d\beta \right] dt dr'. \quad (2.14)$$

Efetuada a integral sobre o ângulo β obtemos

$$V_{vp}(r) = -\frac{2\alpha^2\lambda_e}{3r} \int_0^\infty r' \rho(r') \left[\int_1^\infty \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) \exp\left(-\frac{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\lambda_e} t\right) dt \right. \\ \left. - \int_1^\infty \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) \exp\left(-\frac{2|\mathbf{r} + \mathbf{r}'|}{\lambda_e} t\right) dt \right] dr'. \quad (2.15)$$

Utilizando a equação (2.9), podemos colocar (2.15) na forma

$$V_{vp}(r) = -\frac{2\alpha^2\lambda_e}{3r} \int_0^\infty r' \rho(r') \left[\chi\left(2, \frac{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\lambda_e}\right) - \chi\left(2, \frac{2|\mathbf{r} + \mathbf{r}'|}{\lambda_e}\right) \right] dr'. \quad (2.16)$$

Vamos agora considerar o núcleo como sendo uma distribuição esférica e homogênea de cargas com raio R , ou seja:

$$\rho(r') = \begin{cases} \frac{3Z}{4\pi R^3} & \text{para } r \leq R \\ 0 & \text{para } r > R \end{cases} \quad (2.17)$$

onde $R = 1,2A^{1/3}$ sendo que A é o número de prótons e nêutrons do núcleo considerado.

Assim, a equação (2.16) pode ser escrita na forma

$$V_{vp}(r) = -\frac{Z\alpha}{r} \frac{\alpha\lambda_e}{2\pi R^3} \left[\int_0^R r' \chi\left(2, \frac{2|r - r'|}{\lambda_e}\right) dr' - \int_0^R r' \chi\left(2, \frac{2|r + r'|}{\lambda_e}\right) dr' \right]. \quad (2.18)$$

Vamos considerar apenas valores de r maiores que r' , assim podemos eliminar as barras de valor absoluto e invertendo a ordem de integração obtemos

$$V_{vp}(r) = -\frac{Z\alpha}{r} \frac{\alpha\lambda_e}{2\pi R^3} \int_1^\infty \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) \times \left\{ \int_0^R r' \exp\left[-\frac{2(r-r')}{\lambda_e} t\right] dr' - \int_0^R r' \exp\left[-\frac{2(r+r')}{\lambda_e} t\right] dr' \right\} dt. \quad (2.19)$$

As duas integrais sobre r' podem então ser resolvidas por partes e o resultado pode ser colocado na forma [1]

$$V_{vp}(r) = -\frac{Z\alpha}{r} \frac{\alpha\lambda_e^2}{2\pi R^3} \left\{ \left[\chi\left(3, \frac{2(r+R)}{\lambda_e}\right) + \chi\left(3, \frac{2(r-R)}{\lambda_e}\right) \right] \frac{R}{2} + \left[\chi\left(4, \frac{2(r+R)}{\lambda_e}\right) - \chi\left(4, \frac{2(r-R)}{\lambda_e}\right) \right] \frac{\lambda_e}{4} \right\}, \quad (2.20)$$

onde $\chi(n,x)$ é dado pela equação (2.9). A equação (2.20) é o potencial de polarização do vácuo que leva em conta o tamanho finito do núcleo.

2.2. Potencial de Polarização do Vácuo para um Núcleo Pontual

O potencial de polarização do vácuo para um núcleo pontual pode ser expandido em uma série convergente e não alternada de potências de α e $Z\alpha$. Para um núcleo pontual com carga Ze , a equação (2.16) pode ser reduzida a [1]

$$V_u(r) = -\frac{Z\alpha}{r} \frac{2\alpha}{3\pi} \chi\left(1, \frac{2r}{\lambda_e}\right). \quad (2.21)$$

Este é o termo de ordem $\alpha(Z\alpha)$ ou potencial de Uehling, que é o termo dominante na expansão do potencial de polarização do vácuo para um núcleo pontual. O termo de ordem $\alpha^2(Z\alpha)$ ou potencial de Källén-Sabry, que foi obtido por Blomqvist [17] usando os resultados de Källén e Sabry [11] é dado por

$$V_{ks}(r) = -\frac{Z\alpha}{r} \frac{\alpha^2}{\pi^2} \Phi\left(1, \frac{2r}{\lambda_e}\right), \quad (2.22)$$

onde $\Phi(n, x)$ é definido como

$$\begin{aligned} \Phi(n, x) = & - \int_1^\infty \exp(-xt) \frac{1}{t^n} \left\{ \left(\frac{13}{54t} + \frac{7}{108t^3} + \frac{2}{9t^5} \right) \sqrt{t^2 - 1} \right. \\ & + \left(-\frac{44}{9} + \frac{2}{3t^2} + \frac{5}{4t^4} + \frac{2}{9t^6} \right) \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) + \left(\frac{4}{3t} + \frac{2}{3t^3} \right) \sqrt{t^2 - 1} \ln[8t(t^2 - 1)] \\ & \left. + \left(-\frac{8}{3} + \frac{2}{3t^4} \right) \int_1^\infty \left[\frac{(3y^2 - 1)}{y(y^2 - 1)} \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) - \frac{\ln(8y(y^2 - 1))}{\sqrt{y^2 - 1}} \right] dy \right\} dt. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por ser o segundo termo da expansão do potencial de polarização do vácuo para um núcleo pontual é de se esperar que o potencial de Källén-Sabry represente uma correção devido ao tamanho finito do núcleo. No próximo capítulo veremos que isto não é verdade.

Capítulo 3

Cálculo Numérico do Potencial de Polarização do Vácuo

Vamos agora calcular numericamente as funções $\chi(n,x)$ e $\Phi(n,x)$ afim de obter resultados numéricos para os potenciais V_{vp} , V_u e V_{ks} . Por comodidade definimos as funções

$$F(t) = \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) \quad (3.1)$$

e

$$\begin{aligned} G(t) = & \left(\frac{13}{54t} + \frac{7}{108t^3} + \frac{2}{9t^5}\right)\sqrt{t^2-1} + \left(-\frac{44}{9} + \frac{2}{3t^2} + \frac{5}{4t^4} + \frac{2}{9t^6}\right)\ln(t + \sqrt{t^2-1}) \\ & + \left(\frac{4}{3t} + \frac{2}{3t^3}\right)\sqrt{t^2-1}\ln[8t(t^2-1)] + \left(-\frac{8}{3} + \frac{2}{3t^4}\right)\int_t^\infty H(y)dy, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde

$$H(y) = \frac{(3y^2-1)}{y(y^2-1)}\ln(y + \sqrt{y^2-1}) - \frac{\ln(8y(y^2-1))}{\sqrt{y^2-1}}. \quad (3.3)$$

Assim a equação (2.9) pode ser escrita como

$$\chi(n,x) = \int_1^\infty \exp(-xt) \frac{F(t)}{t^n} dt \quad (3.4)$$

e a equação (2.23) como

$$\Phi(n, x) = \int_1^{\infty} \exp(-xt) \frac{G(t)}{t^n} dt. \quad (3.5)$$

Vamos resolver estas integrais utilizando o método da quadratura de Gauss (apêndice A). Assim, o valor destas integrais será dado por:

$$\chi(n, x) = 2^{1-n} \sum_{i=1}^{50} a_i (1 - q_i)^{n-2} \exp\left(-\frac{2x}{(1 - q_i)}\right) F\left(\frac{2}{(1 - q_i)}\right); \quad (3.6)$$

$$\int_t^{\infty} H(y) dy = 2 \sum_{i=1}^{50} \frac{a_i}{(1 - q_i)^2} H\left(\frac{2t}{(1 - q_i)}\right); \quad (3.7)$$

$$\Phi(n, x) = 2^{1-n} \sum_{i=1}^{50} a_i (1 - q_i)^{n-2} \exp\left(-\frac{2x}{(1 - q_i)}\right) G\left(\frac{2}{(1 - q_i)}\right), \quad (3.8)$$

onde os valores de a_i e q_i são dados no apêndice A. Com o objetivo de otimizar o cálculo computacional é conveniente definir

$$f_i = F\left(\frac{2}{(1 - q_i)}\right), \quad (3.9)$$

$$g_i = G\left(\frac{2}{(1 - q_i)}\right) \quad (3.10)$$

e calcular antecipadamente os 50 valores de f_i e de g_i . Assim, as fórmulas (3.6) e (3.8) podem ser escritas como:

$$\chi(n, x) = 2^{1-n} \sum_{i=1}^{50} a_i f_i (1 - q_i)^{n-2} \exp\left(-\frac{2x}{(1 - q_i)}\right); \quad (3.11)$$

$$\Phi(n, x) = 2^{1-n} \sum_{i=1}^{50} a_i g_i (1 - q_i)^{n-2} \exp\left(-\frac{2x}{(1 - q_i)}\right). \quad (3.12)$$

Calculando estas funções para diferentes valores de n e x , com o auxílio de uma linguagem de programação tal como C++, Turbo Pascal 7.0 ou Fortran 77 podemos reproduzir os resultados numéricos já obtidos por Fullerton e Rinker [12] e obter resultados numéricos para os potenciais (2.20), (2.21) e (2.22).

Estamos interessados apenas em analisar o efeito do tamanho finito do núcleo no potencial de polarização do vácuo. Não nos interessa o efeito do número atômico Z . Com o objetivo de tornar os resultados independentes do número atômico Z , vamos calcular a razão entre os potenciais V_{vp} , V_u e V_{ks} e o potencial coulombiano $V_c = Z\alpha / r$. Assim, obtemos grandezas adimensionais que se forem multiplicadas por 100, dão a contribuição percentual relativa ao potencial coulombiano.

Na figura (3.1) são mostradas as contribuições percentuais dos dois primeiros termos da expansão do potencial de polarização do vácuo para um núcleo pontual. Se o potencial de Källén-Sabry representa uma correção devido ao tamanho finito do núcleo, então devemos ter $V_{vp} / V_c \approx V_u / V_c + V_{ks} / V_c$ ou $V_{ks} / V_c \approx V_{vp} / V_c - V_u / V_c$. Porém, a partir das curvas da figura (3.2) vemos que a correção dada pelo potencial de Källén-Sabry é diferente da correção devido ao tamanho finito do núcleo. Além disso a correção dada pelo potencial de Källén-Sabry é a mesma para todos os núcleos, enquanto que a correção devido ao tamanho finito do núcleo difere de um núcleo para o outro. Quanto menor for o núcleo considerado, tanto maior será a diferença entre a correção exata e a correção dada pelo potencial de Källén-Sabry.

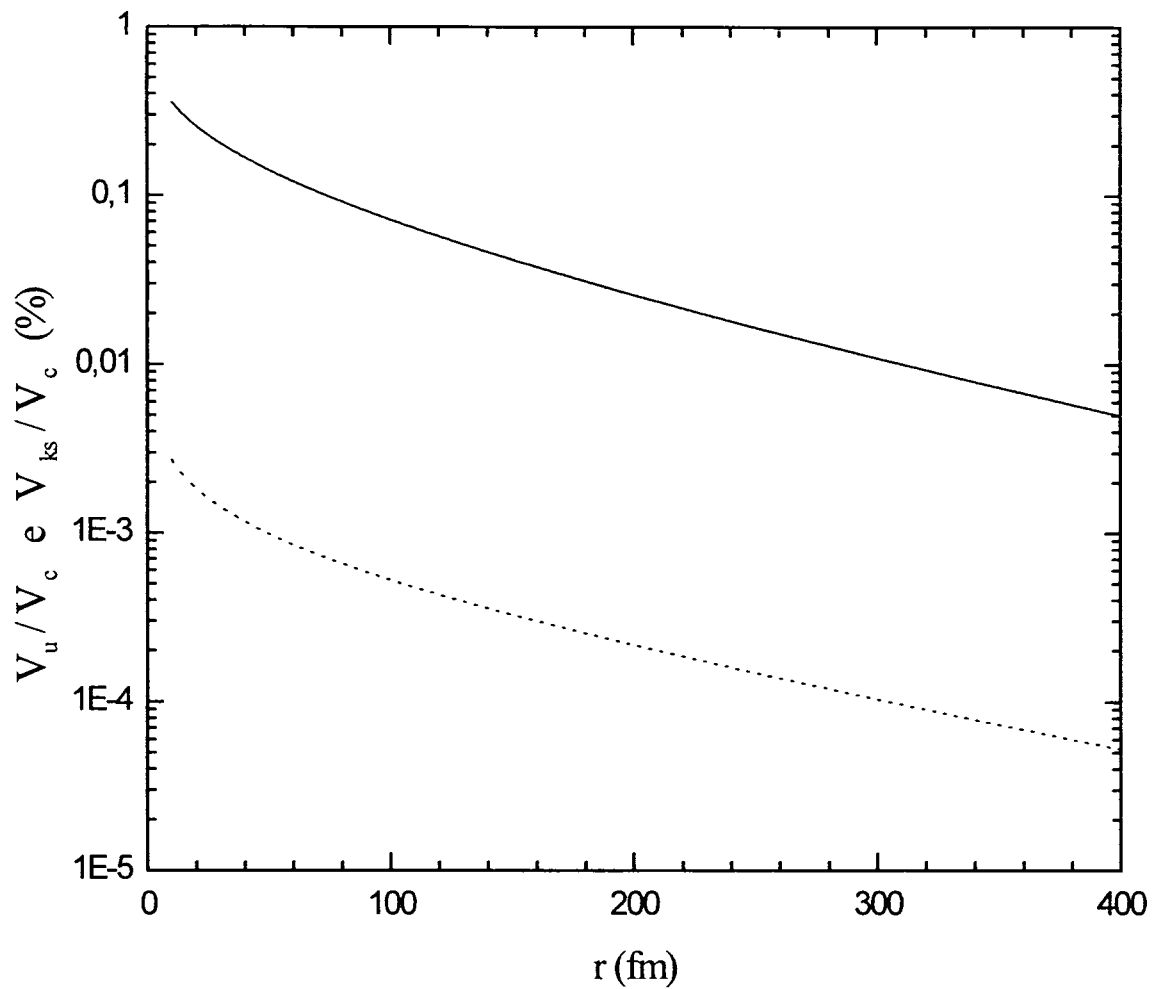


Figura 3.1 Contribuições percentuais dos dois primeiros termos da expansão do potencial de polarização do vácuo para um núcleo pontual normalizadas em relação ao potencial coulombiano. A curva cheia refere-se ao potencial de Uehling e a curva pontilhada refere-se ao potencial de Källén-Sabry.

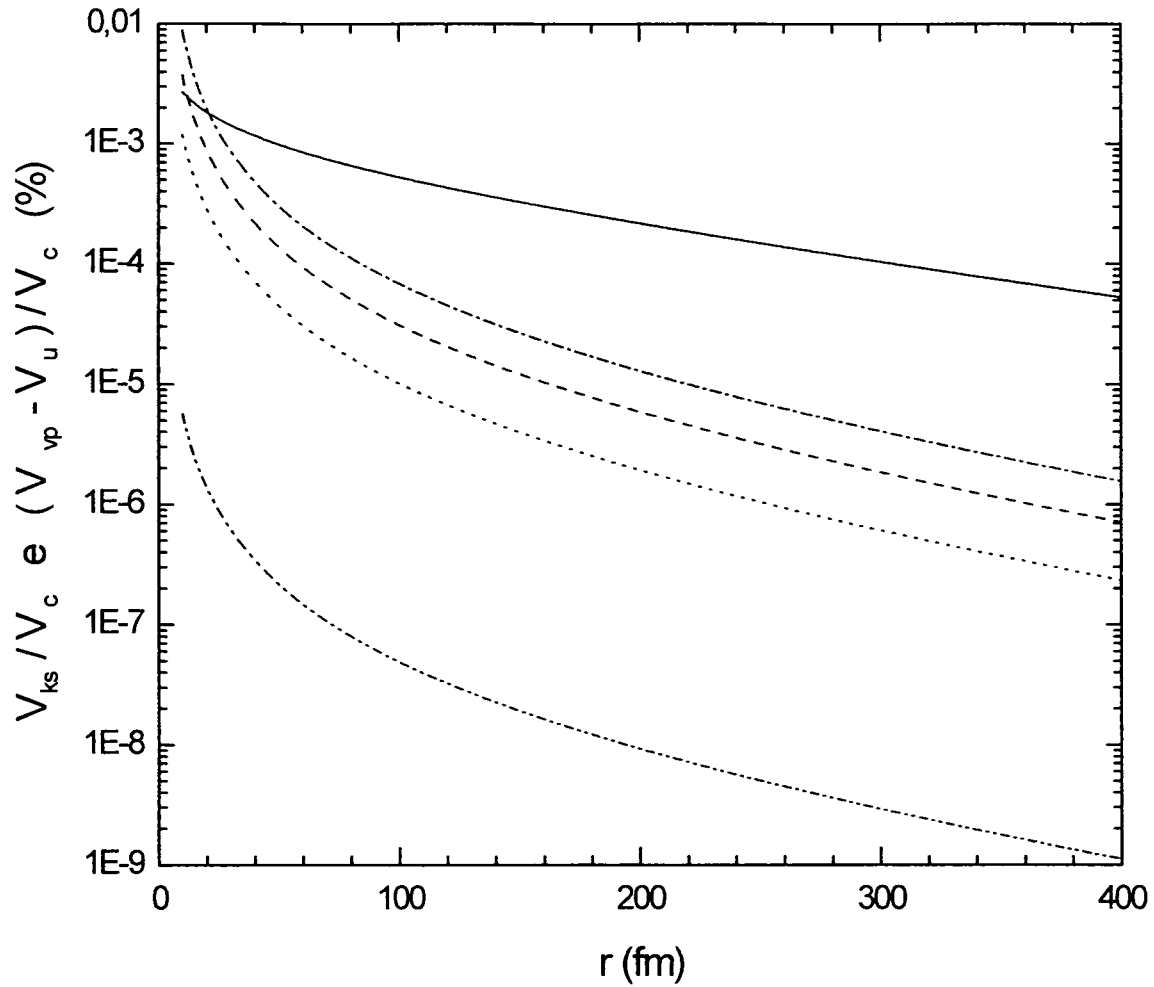


Figura 3.2 Comparação entre as contribuições percentuais do potencial de Källén-Sabry (curva cheia) e da diferença entre o potencial de polarização do vácuo para o núcleo finito e o potencial de Uehling, sendo que a curva pontilhada e tracejada refere-se ao chumbo, a curva tracejada refere-se ao cobre, a curva pontilhada refere-se ao carbono e a curva tracejada e duplamente pontilhada refere-se ao hélio.

Capítulo 4

Efeito do Potencial de Polarização do Vácuo e do Tamanho Finito do Núcleo no Espalhamento de Íons Pesados

Neste capítulo, calcularemos o desvio angular do espalhamento clássico devido ao efeito do potencial de polarização do vácuo e a correspondente seção de choque de espalhamento. Vamos trabalhar com espalhamento de íons pesados em energias abaixo da barreira de Coulomb. Nestas condições, a interação nuclear de curto alcance é desprezível, o efeito dominante é o do potencial de Coulomb e o potencial de polarização do vácuo contribui com um pequeno desvio do espalhamento clássico. Além do potencial de polarização do vácuo, existem outros pequenos efeitos que contribuem para o desvio angular do espalhamento clássico, tais como: polarizabilidade nuclear, blindagem eletrônica e correções relativísticas. Esses efeitos foram investigados experimentalmente por Lynch et. al. [18] no espalhamento de $^{16}\text{O} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$.

As expressões para o desvio angular do espalhamento clássico e para a seção de choque de espalhamento serão desenvolvidas utilizando um tratamento semi-clássico [13,14,15] que é válido quando o parâmetro de Sommerfeld $\eta = Z_1 Z_2 \alpha \sqrt{\mu / 2E}$ é grande o bastante, ou seja, se $\eta^{-1} \ll 1$. Na expressão do parâmetro de Sommerfeld Z_1 e Z_2 são os números atômicos da partícula incidente e da partícula alvo, μ é a massa reduzida e E é a energia da partícula incidente no referencial do centro de massa (apêndice B). Neste capítulo discutiremos os espalhamentos de $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{C}$ com $E = 2 \text{ MeV}$ e $^{208}\text{Pb} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$ com $E = 500 \text{ MeV}$, o que garante a validade do tratamento semi-clássico. Desta forma o desvio angular do espalhamento clássico, no referencial do centro de massa é dado por [13]

$$\Delta\theta = \left[\frac{d}{d\lambda} \Delta\delta(\ell) \right]_{\lambda_0} = 2 \frac{d}{d\ell} \left[2\mu \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \frac{V(r)/2}{\sqrt{2\mu \left[E - V_c(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{2\mu r^2} \right]}} dr \right], \quad (4.1)$$

onde $\Delta\delta(\ell)$ é a mudança de fase devido ao potencial espalhador $V(r)$, $V_c = Z_1 Z_2 \alpha / r$ é a interação coulombiana entre o núcleo incidente e o núcleo alvo e $r_c(\ell)$ é raiz da expressão dentro do radicando. Temos também que $\lambda = 1/2 + \ell$ ou $\ell = \lambda - 1/2$ sendo que ℓ é o momento angular orbital. Assim a equação (4.1) pode ser escrita como

$$\Delta\theta = 2 \left[\frac{d}{d\ell} \Delta\delta(\ell) \frac{d\ell}{d\lambda} \right]_{\lambda_0} = 2 \frac{d}{d\ell} \Delta\delta(\ell) = 2 \frac{d}{d\ell} \left[2\mu \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \frac{V(r)/2}{\sqrt{2\mu \left[E - V_c(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{2\mu r^2} \right]}} dr \right] \quad (4.2)$$

ou ainda

$$\Delta\theta = 2 \frac{d}{d\ell} \Delta\delta(\ell) = 2 \frac{d}{d\ell} \left[\sqrt{\frac{\mu}{2E}} \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \frac{rV(r)}{\sqrt{r^2 - \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{E} r - \frac{\ell(\ell+1)}{2\mu E}}} dr \right]. \quad (4.3)$$

A relação entre ℓ e o ângulo de deflexão θ é dada por

$$\ell = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \eta^2 \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (4.4)$$

Por conveniência definimos as constantes $A = \sqrt{\mu/2E}$ e $B = Z_1 Z_2 \alpha / E$ e também as funções

$$U(r) = rV(r), \quad (4.5)$$

$$C(\ell) = \frac{\ell(\ell+1)}{2\mu E}. \quad (4.6)$$

Assim a equação (4.3) pode ser escrita na forma

$$\Delta\theta = 2 \frac{d}{d\ell} \Delta\delta(\ell) = 2 \frac{d}{d\ell} \left[A \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \frac{U(r)}{\sqrt{r^2 - Br - C(\ell)}} dr \right] \quad (4.7)$$

e a raiz do polinômio dentro do radical é então dada por

$$r_c(\ell) = \frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C(\ell)}. \quad (4.8)$$

A singularidade no denominador será eliminada mais adiante efetuando integração por partes.

4.1. Seção de Choque de Espalhamento

Se considerarmos a partícula alvo e a partícula incidente como sendo dois bósons idênticos, sem spin, de carga Ze e cuja interação é puramente coulombiana, então a seção de choque simetrizada, conhecida como seção de choque Mott, é dada por [19]

$$\frac{d\sigma_M}{d\Omega} = \frac{d\sigma_R}{d\Omega}(\theta) + \frac{d\sigma_R}{d\Omega}(\pi - \theta) + 2\sqrt{\frac{d\sigma_R}{d\Omega}(\theta) \frac{d\sigma_R}{d\Omega}(\pi - \theta)} \cos\left[2\eta \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\right], \quad (4.9)$$

onde $d\sigma_R/d\Omega$ é a seção de choque de Rutherford (apêndice C). A seção de choque simetrizada que leva em conta os efeitos do potencial de polarização do vácuo pode ser colocada na forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Cl}}{d\Omega}(\theta) + \frac{d\sigma_{Cl}}{d\Omega}(\pi - \theta) + 2\sqrt{\frac{d\sigma_{Cl}}{d\Omega}(\theta) \frac{d\sigma_{Cl}}{d\Omega}(\pi - \theta)} \cos\left[2\eta \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) + D\delta\right] \quad (4.10)$$

onde

$$D\delta = 2[\Delta\delta(\ell(\theta)) - \Delta\delta(\ell(\pi - \theta))] \quad (4.11)$$

e

$$\frac{d\sigma_{cl}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_R}{d\Omega} \left(1 + \frac{\Delta\theta}{2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3\Delta\theta}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{d}{d\theta} \Delta\theta \right) \quad (4.12)$$

é a seção de choque clássica [13,14,15]. Para que seja possível resolver numericamente a seção de choque simetrizada (4.10), é necessário colocar as expressões para $D\delta$, $\Delta\theta$ e $d\Delta\theta/d\theta$ em um formato que não contenha singularidades no denominador. De acordo com (4.7) temos que

$$\Delta\delta(\ell) = \left[A \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \frac{U(r)}{\sqrt{r^2 - Br - C(\ell)}} dr \right]. \quad (4.13)$$

Integrando por partes para eliminar o zero no denominador (ver apêndice D), temos

$$\Delta\delta(\ell) = -2A \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \frac{\sqrt{r^2 - Br - C(\ell)}}{(2r - B)} \left[U'(r) - \frac{2U(r)}{(2r - B)} \right] dr. \quad (4.14)$$

Assim, (4.11) será dada por

$$D\delta = 4A \left\{ \int_{r_c(\ell(\theta))}^{\infty} \frac{\sqrt{r^2 - Br - C(\ell(\theta))}}{(2r - B)} \left[\frac{2U(r)}{(2r - B)} - U'(r) \right] dr - \int_{r_c(\ell(\pi-\theta))}^{\infty} \frac{\sqrt{r^2 - Br - C(\ell(\pi-\theta))}}{(2r - B)} \left[\frac{2U(r)}{(2r - B)} - U'(r) \right] dr \right\}. \quad (4.15)$$

Substituindo (4.14) em (4.7), teremos

$$\Delta\theta = -4A \frac{d}{d\ell} \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \frac{\sqrt{r^2 - Br - C(\ell)}}{(2r - B)} \left[U'(r) - \frac{2U(r)}{(2r - B)} \right] dr. \quad (4.16)$$

Após efetuar a derivada da integral em relação a ℓ (ver apêndice E) obtemos

$$\Delta\theta = 2AD(\ell) \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r^2 - Br - C(\ell)}} \left[\frac{U'(r)}{(2r - B)} - \frac{2U(r)}{(2r - B)^2} \right] dr, \quad (4.17)$$

onde

$$D(\ell) = \frac{d}{d\ell} C(\ell) = \frac{2\ell + 1}{2\mu E}. \quad (4.18)$$

Após integrar por partes para eliminar o zero no denominador (ver apêndice D), a equação (4.17) pode ser colocada na forma

$$\Delta\theta = -4AD(\ell) \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \sqrt{r^2 - Br - C(\ell)} \left[\frac{12U(r)}{(2r - B)^4} - \frac{6U'(r)}{(2r - B)^3} + \frac{U''(r)}{(2r - B)^2} \right] dr. \quad (4.19)$$

A derivada de $\Delta\theta$ em relação a θ é dada por

$$\frac{d}{d\theta} \Delta\theta = \frac{d}{d\ell} \Delta\theta \frac{d\ell}{d\theta}. \quad (4.20)$$

Derivando a equação (4.4) em relação a θ obtemos

$$\frac{d\ell}{d\theta} = - \frac{\eta^2 \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{4} + \eta^2 \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}. \quad (4.21)$$

Após derivar (4.19) em relação a ℓ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\ell} \Delta\theta = & -\frac{4A}{\mu E} \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \sqrt{r^2 - Br - C(\ell)} \left[\frac{12U(r)}{(2r-B)^4} - \frac{6U'(r)}{(2r-B)^3} + \frac{U''(r)}{(2r-B)^2} \right] dr \\ & - 4AD(\ell) \frac{d}{d\ell} \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \sqrt{r^2 - Br - C(\ell)} \left[\frac{12U(r)}{(2r-B)^4} - \frac{6U'(r)}{(2r-B)^3} + \frac{U''(r)}{(2r-B)^2} \right] dr. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Derivando a integral no segundo termo em relação a ℓ (apêndice E) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\ell} \Delta\theta = & -\frac{4A}{\mu E} \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \sqrt{r^2 - Br - C(\ell)} \left[\frac{12U(r)}{(2r-B)^4} - \frac{6U'(r)}{(2r-B)^3} + \frac{U''(r)}{(2r-B)^2} \right] dr \\ & + 2A[D(\ell)]^2 \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r^2 - Br - C(\ell)}} \left[\frac{12U(r)}{(2r-B)^4} - \frac{6U'(r)}{(2r-B)^3} + \frac{U''(r)}{(2r-B)^2} \right] dr. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Após integrar por partes para eliminar o zero no denominador da integral no segundo termo (apêndice D) e substituir em (4.20) juntamente com (4.21), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \Delta\theta = & \frac{\eta^2 \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{4} + \eta^2 \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \\ & \times \left\{ \frac{4A}{\mu E} \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \frac{\sqrt{r^2 - Br - C(\ell)}}{(2r-B)^2} \left[\frac{12U(r)}{(2r-B)^2} - \frac{6U'(r)}{(2r-B)} + U''(r) \right] dr \right. \\ & \left. - 4A[D(\ell)]^2 \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \frac{\sqrt{r^2 - Br - C(\ell)}}{(2r-B)^3} \left[\frac{120U(r)}{(2r-B)^3} - \frac{60U'(r)}{(2r-B)^2} + \frac{12U''(r)}{(2r-B)} - U'''(r) \right] dr \right\}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Assim colocamos as expressões para $D\delta$, $\Delta\theta$ e $d\Delta\theta/d\theta$ em um formato que não contém singularidades no denominador e que permite a obtenção de resultados numéricos.

4.2. Cálculo Numérico da Seção de Choque de Espalhamento

Vamos agora calcular numericamente as expressões para $\Delta\theta$, $d\Delta\theta/d\theta$ e $D\delta$ com o objetivo de obter resultados numéricos para a seção de choque simetrizada (4.10). Por comodidade definimos as funções:

$$L_1(r) = \frac{\sqrt{r^2 - Br - C(\ell(\theta))}}{(2r - B)} \left[\frac{2U(r)}{(2r - B)} - U'(r) \right]; \quad (4.25)$$

$$L_2(r) = \frac{\sqrt{r^2 - Br - C(\ell(\theta))}}{(2r - B)^2} \left[\frac{12U(r)}{(2r - B)^2} - \frac{6U'(r)}{(2r - B)} + U''(r) \right]; \quad (4.26)$$

$$L_3(r) = \frac{\sqrt{r^2 - Br - C(\ell(\theta))}}{(2r - B)^3} \left[-\frac{120U(r)}{(2r - B)^3} + \frac{60U'(r)}{(2r - B)^2} - \frac{12U''(r)}{(2r - B)} + U'''(r) \right]. \quad (4.27)$$

assim as equações (4.15), (4.19) e (4.24) podem ser escritas como

$$D\delta = 4A \left[\int_{r_c(\ell(\theta))}^{\infty} L_1(r) dr - \int_{r_c(\ell(\pi-\theta))}^{\infty} L_1(r) dr \right]; \quad (4.28)$$

$$\Delta\theta = -4AD(\ell(\theta)) \int_{r_c(\ell(\theta))}^{\infty} L_2(r) dr; \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \Delta\theta = & \frac{\eta^2 \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{4} + \eta^2 \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \left\{ \frac{4A}{\mu E} \int_{r_c(\ell)}^{\infty} L_2(r) dr \right. \\ & \left. + 4A[D(\ell(\theta))]^2 \int_{r_c(\ell(\theta))}^{\infty} L_3(r) dr \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Utilizando o método da quadratura de Gauss (apêndice A), obtemos

$$D\delta = 8A \left[r_c(\ell(\theta)) \sum_{i=1}^{50} \frac{a_i}{(1-q_i)^2} L_1 \left(\frac{2r_c(\ell(\theta))}{(1-q_i)} \right) - r_c(\ell(\pi-\theta)) \sum_{i=1}^{50} \frac{a_i}{(1-q_i)^2} L_1 \left(\frac{2r_c(\ell(\pi-\theta))}{(1-q_i)} \right) \right]; \quad (4.31)$$

$$\Delta\theta = -8AD(\ell(\theta))r_c(\ell(\theta)) \sum_{i=1}^{50} \frac{a_i}{(1-q_i)^2} L_2 \left(\frac{2r_c(\ell(\theta))}{(1-q_i)} \right); \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \Delta\theta = & \frac{\eta^2 \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{4} + \eta^2 \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \left\{ \frac{8Ar_c(\ell(\theta))}{\mu E} \sum_{i=1}^{50} \frac{a_i}{(1-q_i)^2} L_2 \left(\frac{2r_c(\ell(\theta))}{(1-q_i)} \right) \right. \\ & \left. + 8A[D(\ell(\theta))]^2 r_c(\ell(\theta)) \sum_{i=1}^{50} \frac{a_i}{(1-q_i)^2} L_3 \left(\frac{2r_c(\ell(\theta))}{(1-q_i)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde os valores de a_i e q_i são dados no apêndice A. Agora podemos calcular numericamente a seção de choque simetrizada (4.10) que leva em conta os efeitos do potencial de polarização do vácuo. Inicialmente vamos calcular a grandeza

$$\gamma = \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega} - \frac{d\sigma_M}{d\Omega}}{\frac{d\sigma}{d\Omega} + \frac{d\sigma_M}{d\Omega}} \quad (4.34)$$

para o espalhamento de $^{208}\text{Pb} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$ com $E = 500 \text{ MeV}$, considerando o efeito do potencial de polarização do vácuo que leva em conta o efeito do tamanho finito do núcleo, ou seja, consideraremos o potencial $V(r)$ que aparece na equação (4.1) como sendo o potencial V_{vp} (equação 2.20). A figura 4.1 mostra o gráfico da grandeza γ para um pequeno intervalo angular próximo a 90° que confere com o gráfico obtido por Hussein et. al. [8].

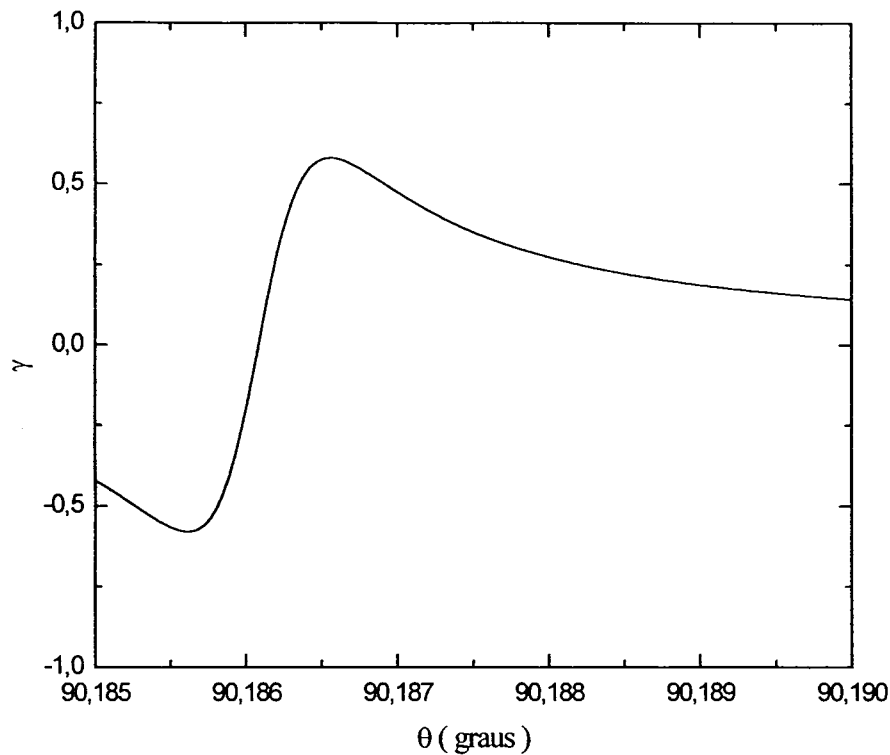


Figura 4.1 Gráfico da grandeza γ para o espalhamento de ^{208}Pb por ^{208}Pb com $E=500\text{MeV}$ considerando o efeito do potencial de polarização do vácuo que leva em conta o efeito do tamanho finito do núcleo. Esta curva está presente na literatura [8].

Com o objetivo de evidenciar o efeito do potencial de polarização do vácuo no espalhamento de íons pesados, vamos calcular o desvio percentual

$$\Delta P = \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega} - \frac{d\sigma_M}{d\Omega}}{\frac{d\sigma_M}{d\Omega}} \quad (4.35)$$

da seção de choque simetrizada (4.10) que leva em conta o efeito do potencial de polarização do vácuo em relação a seção de choque Mott (4.9) que leve em conta apenas a interação coulombiana. Vamos inicialmente considerar o efeito do potencial de polarização no vácuo (2.20) que leva em conta o efeito do tamanho finito do núcleo. Na figura 4.2 o gráfico obtido para o espalhamento de $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{C}$ com $E = 2\text{MeV}$ é comparado com o gráfico experimental obtido por Vetterli et. al. [7] no referencial do laboratório onde vale a

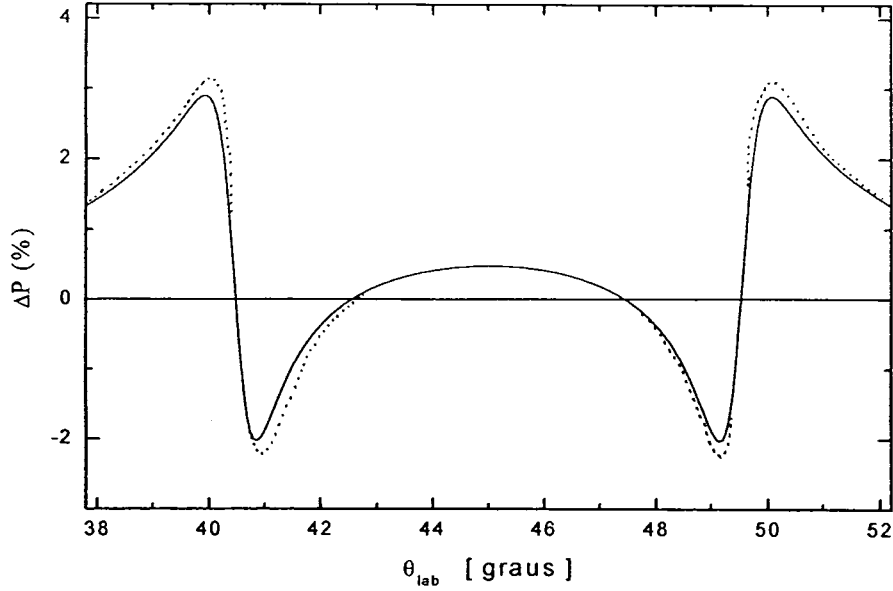


Figura 4.2 Desvio percentual da seção de choque Mott devido ao efeito do potencial de polarização do vácuo para o espalhamento de ^{12}C por ^{12}C com $E=2\text{MeV}$. A curva cheia foi obtida usando o método semi-clássico e a quadratura de Gauss e a curva pontilhada é a curva experimental obtida por Vetterli et. al. [7].

relação $\theta_{\text{lab}} = \theta/2$. Na figura 4.3 é mostrado o mesmo gráfico da figura 4.2, porém em termos do ângulo θ do centro de massa e num intervalo angular maior. Na figura 4.4 é mostrado o gráfico de ΔP para o espalhamento de $^{208}\text{Pb} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$ com $E = 500\text{ MeV}$. Nas figuras 4.3 e 4.4 podemos observar que o número de máximos e mínimos num determinado intervalo angular é muito maior para o chumbo do que para o carbono. Além disso o desvio percentual da seção de choque Mott alcança picos muito mais altos para o chumbo do que para o carbono. Enfim, quanto maior for o número atômico, tanto maior será o desvio do espalhamento coulombiano e o número de oscilações na seção de choque simetrizada.

Para evidenciar o efeito do tamanho finito do núcleo no espalhamento de íons pesados, vamos seguir um procedimento análogo ao do capítulo 3, ou seja, vamos comparar o efeito do termo de ordem $\alpha^2 Z \alpha$ da expansão do potencial de polarização do vácuo para o núcleo pontual (2.22) com a diferença entre o potencial de polarização do vácuo que leva em conta o tamanho finito do núcleo (2.20) e o termo de ordem $\alpha Z \alpha$ (2.21). Na figura 4.5 é mostrado o resultado para o espalhamento de $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{C}$ com $E = 2\text{ MeV}$ e na figura 4.6 é mostrado o resultado para o espalhamento de $^{208}\text{Pb} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$ com $E = 500\text{ MeV}$. No caso

do chumbo foi necessário considerar um intervalo angular muito pequeno nas proximidades de 90° devido ao grande número de oscilações no gráfico.

Novamente podemos observar que a correção dada pelo potencial de Källén-Sabry é diferente da correção exata que leva em conta o efeito do tamanho finito do núcleo, pois as curvas não coincidem nos dois casos.

Na tabela 4.1 são mostradas várias contribuições percentuais para o desvio do espalhamento Mott, normalizadas em relação ao potencial de Uehling. Os valores de $V_{vp} - V_u$ para o Carbono e o Chumbo foram obtidos usando o método semi-clássico e a quadratura de Gauss e os demais valores foram obtidos por Vetterli et. al. [7].

EFEITO	CONTRIBUIÇÃO (%)
V_u	100
V_{ks}	+0,71
$V_{vp} - V_u$ (Carbono)	+0,06
$V_{vp} - V_u$ (Chumbo)	+0,55
Polarização do vácuo de ordem $Z\alpha(Z\alpha)^3$	- 0,02
Interação nuclear	<0,01
Polarizabilidade nuclear	- 0,6 \pm 0,1
Efeitos relativísticos	+ 2,6 \pm 1,0
Blindagem eletrônica	- 6,6 \pm 2,0
Ionização	+ 1,1 \pm 0,5

Tabela 4.1 Contribuições percentuais para o desvio do espalhamento Mott normalizadas em relação ao potencial de Uehling. Os valores de $V_{vp} - V_u$ para o Carbono e o Chumbo foram obtidos usando o método semi-clássico e a quadratura de Gauss e os demais valores foram obtidos por Vetterli et. al. [7].

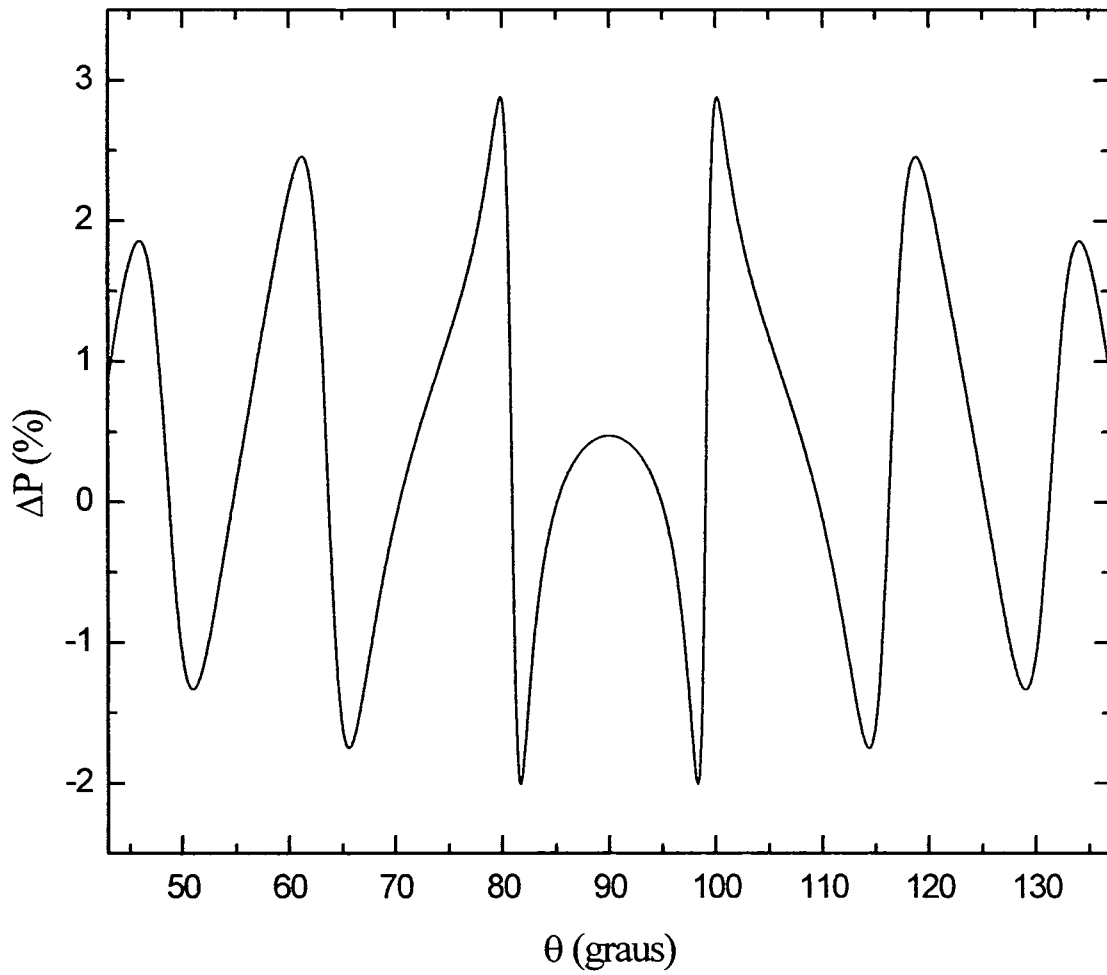


Figura 4.3 Desvio percentual da seção de choque simetrizada que leva em conta o efeito do potencial de polarização do vácuo em relação a seção de choque Mott, para o espalhamento de ^{12}C por ^{12}C com $E=2\text{MeV}$.

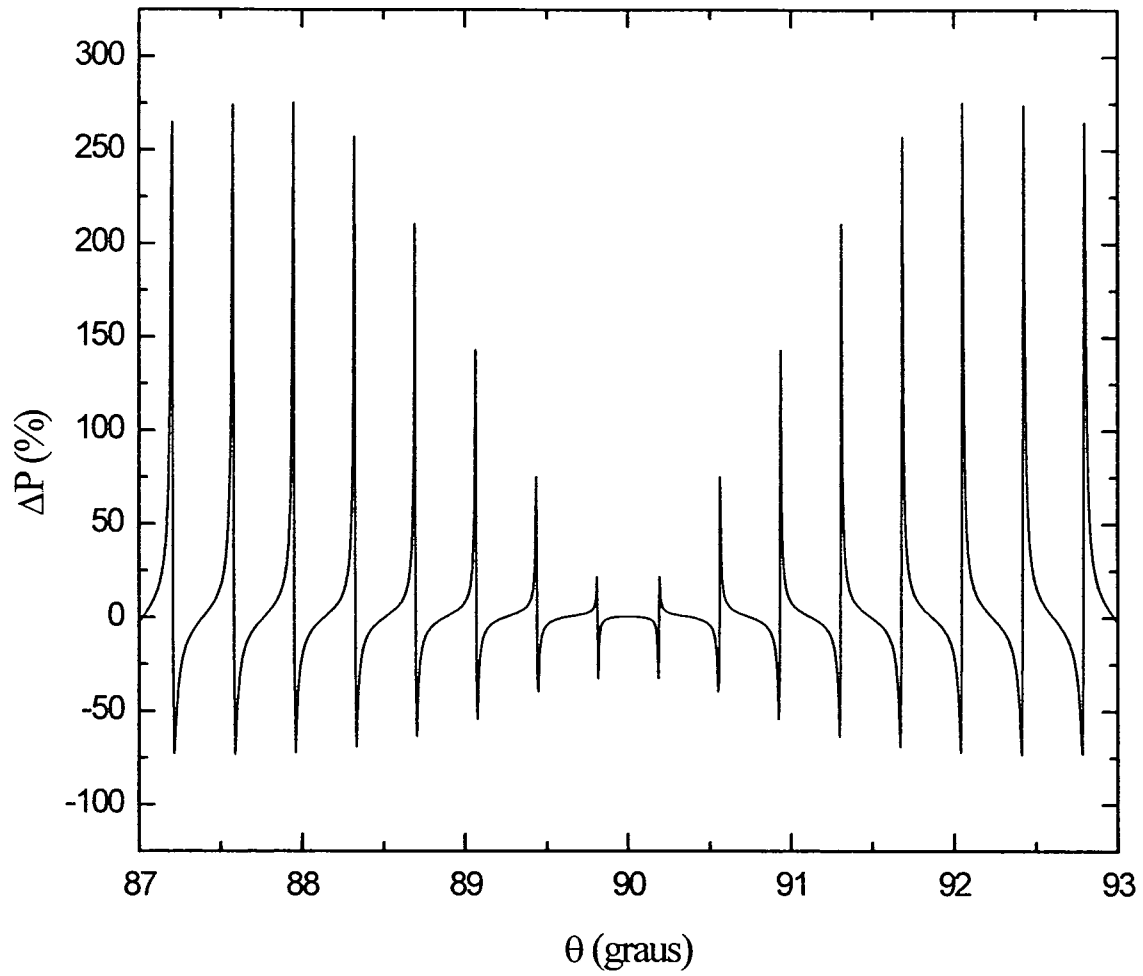


Figura 4.4 Desvio percentual da seção de choque simetrizada que leva em conta o efeito do potencial de polarização do vácuo em relação a seção de choque Mott, para o espalhamento de ^{208}Pb por ^{208}Pb com $E=500\text{MeV}$.

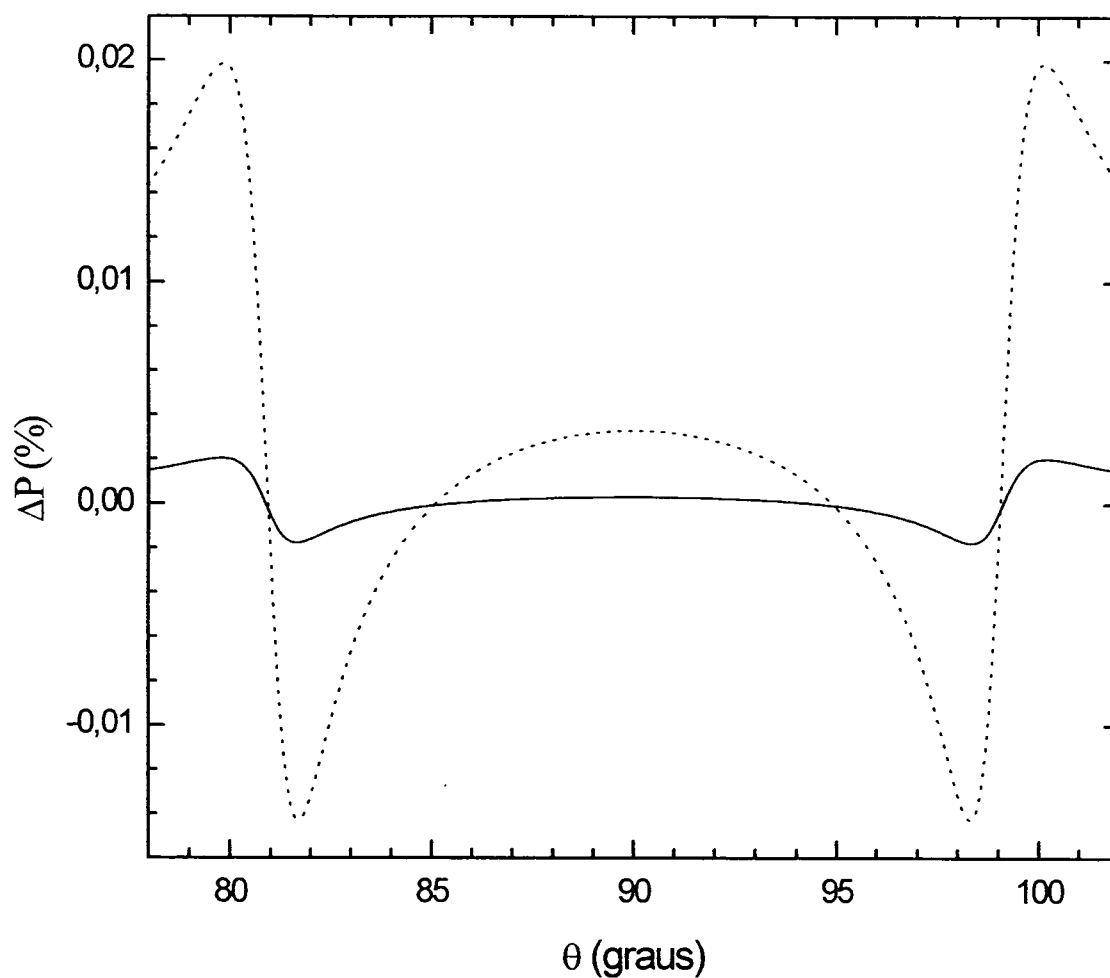


Figura 4.5 comparação entre os desvios percentuais da seção de choque Mott devido aos efeitos dos potenciais V_{ks} (curva cheia) e $V_{vp} - V_u$ (curva pontilhada) para o espalhamento de ^{12}C por ^{12}C com $E=2\text{MeV}$.

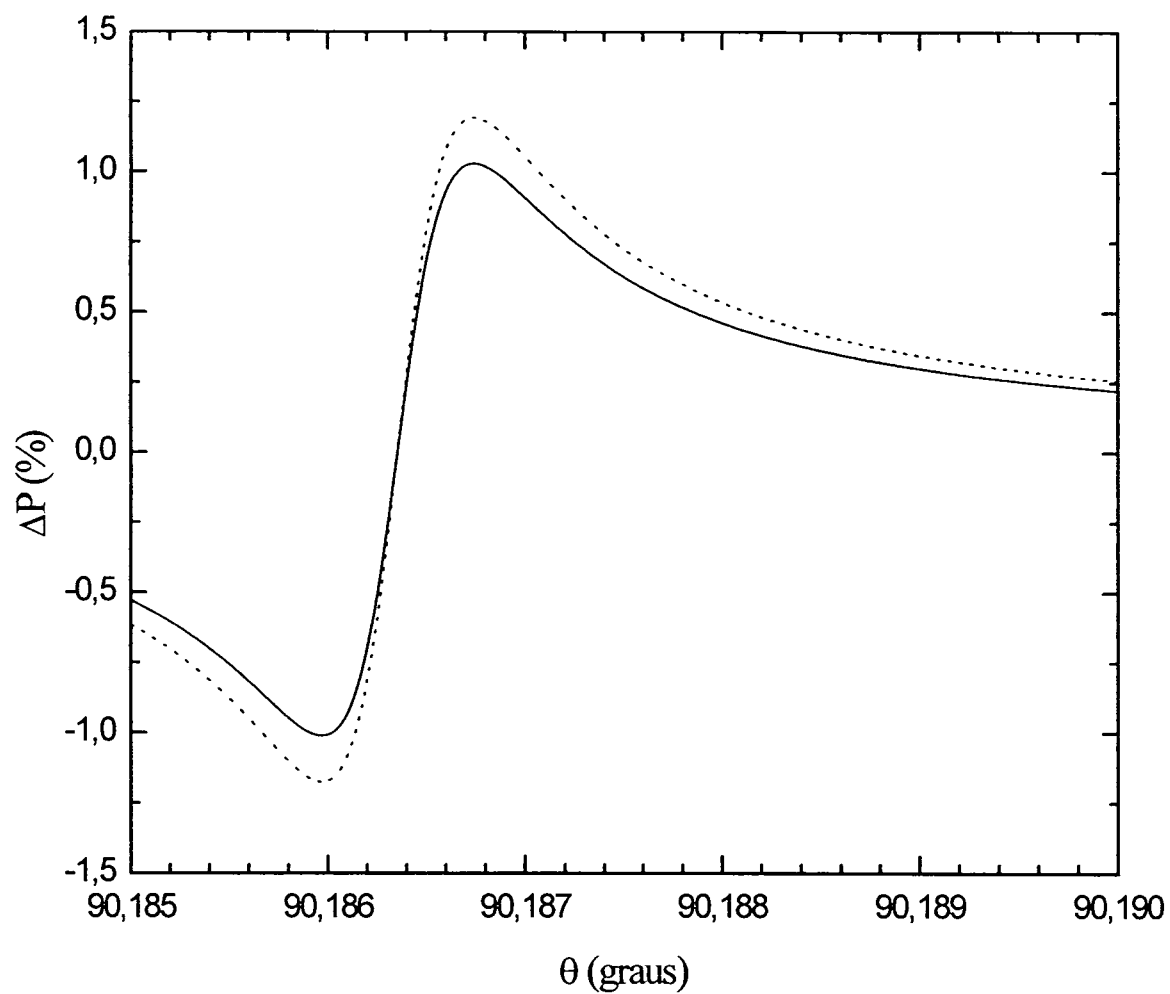


Figura 4.6 Comparação entre os desvios percentuais da seção de choque Mott devido aos efeitos dos potenciais V_{ks} (curva cheia) e $V_{vp} - V_u$ (curva pontilhada) para o espalhamento de ^{208}Pb por ^{208}Pb com $E=500\text{MeV}$.

Capítulo 5

Conclusão

Nesta dissertação deduzimos uma equação exata para o potencial de polarização do vácuo, que leva em conta o efeito do tamanho finito do núcleo. Também foram apresentados os dois primeiros termos da expansão do potencial de polarização do vácuo para um núcleo pontual, conhecidos respectivamente como potencial de Uehling e potencial de Källén-Sabry. Além destes, que são respectivamente os termos de ordem $\alpha Z\alpha$ e $\alpha^2 Z\alpha$, existem ainda na literatura [1] os termos de ordem $\alpha(Z\alpha)^3$, $\alpha(Z\alpha)^5$ e $\alpha(Z\alpha)^7$ que representam o maior efeito de distorção das funções de onda dos elétrons e pósitrons virtuais em um campo coulombiano intenso. A discussão principal desta dissertação está relacionada com o significado físico do potencial de Källén-Sabry.

No espalhamento de íons pesados existem dois efeitos que devem ser levados em conta: um deles é a correção devido a intensidade do campo, que pode ser atribuída ao efeito da distorção das funções de onda dos elétrons e pósitrons virtuais em um campo coulombiano intenso. O outro efeito é que numa situação física real, uma quantidade significativa de cargas, como por exemplo um núcleo pesado de um átomo, sempre tem um tamanho que não pode ser desprezado quando trabalhamos com distâncias da ordem de alguns Fermis (10^{-15} m). No capítulo 3 foi demonstrado que a correção devido ao tamanho finito da distribuição de cargas no núcleo $(V_p - V_u)/V_c$ é diferente e sempre maior do que correção V_{ks}/V_c dada pelo termo de ordem $\alpha^2 Z\alpha$ da expansão do potencial de polarização do vácuo para o núcleo pontual. Quanto menor for o núcleo considerado, tanto maior será a diferença entre a correção exata e a correção dada pelo potencial de Källén-Sabry. A idéia é que diminuindo o tamanho da distribuição de cargas, estaríamos nos aproximando daquilo que poderíamos chamar de carga pontual. Assim concluímos que o potencial de Källén-sabry não pode representar uma correção devido ao tamanho finito do núcleo.

O efeito do tamanho finito do núcleo também pode ser observado (vide capítulo 4) quando comparamos os desvios percentuais da seção de choque Mott, relativos ao efeitos da correção devido ao tamanho finito do núcleo e da correção devido ao potencial de

Källén-Sabry. As curvas obtidas nos dois casos não coincidem, o que reforça a afirmação de que o potencial de Källén-sabry não representa uma correção devido ao tamanho finito do núcleo.

Apêndice A

Quadratura de Gauss

A quadratura de Gauss é um método para integração numérica, que para um mesmo número de pontos, fornece resultados bem mais precisos que outros métodos tais como regra dos trapézios ou regra de Simpson [20].

Na quadratura de Gauss, as abcissas são pré-fixadas conforme o número de pontos utilizado ao invés de serem escolhidas pela pessoa que utiliza o método. Nesta dissertação, todas as integrais que devem ser resolvidas numericamente tem o formato

$$I = \int_b^{\infty} f(t)dt, \quad (A.1)$$

sendo que b é um número real e finito. O primeiro passo para aplicar o método da quadratura de Gauss é mudar o intervalo de integração de $[b, \infty)$ para $[-1, 1]$. Isto pode ser feito através da mudança de variáveis

$$t = \frac{2b}{(1-q)}, \quad (A.2)$$

o que resulta

$$I = \int_{-1}^1 f\left(\frac{2b}{(1-q)}\right) \frac{2b}{(1-q)^2} dq. \quad (A.3)$$

A integral é então calculada pela fórmula

$$I = \sum_{i=1}^n a_i f\left(\frac{2b}{(1-q_i)}\right) \frac{2b}{(1-q_i)^2}, \quad (A.4)$$

onde n é o número de pontos utilizado, q_i são as abcissas pré-fixadas para o número n de pontos e a_i são os coeficientes ou pesos também pré-fixados conforme o número n de pontos. Em todos os cálculos desta dissertação é utilizado $n = 50$ sendo que os valores de a_i e q_i estão listados na tabela abaixo. Tabelas de a_i e q_i para outros valores de n podem ser encontradas em [21].

i	a_i	q_i
1;2	0,00290862255315514095	$\pm 0,998866404420071050$
3;4	0,00675979919574540150	$\pm 0,994031969432090712$
5;6	0,0105905483836509692	$\pm 0,985354084048005882$
7;8	0,0143808227614855744	$\pm 0,972864385106692073$
9;10	0,0181155607134893903	$\pm 0,956610955242807942$
11;12	0,0217802431701247929	$\pm 0,936656618944877933$
13;14	0,0253606735700123904	$\pm 0,913078556655791893$
15;16	0,0288429935805351980	$\pm 0,885967979523613048$
17;18	0,0322137282235780166	$\pm 0,855429769429946084$
19;20	0,035459835615146154	$\pm 0,82158207085933594$
21;22	0,038568756612587675	$\pm 0,78455583290039926$
23;24	0,041528463090147697	$\pm 0,74449430222606853$
25;26	0,044327504338803275	$\pm 0,70155246870682225$
27;28	0,046955051303948432	$\pm 0,65589646568543936$
29;30	0,049400938449466314	$\pm 0,60770292718495023$
31;32	0,051655703069581138	$\pm 0,55715830451465005$
33;34	0,053710621888996246	$\pm 0,50445814490746420$
35;36	0,055557744806212517	$\pm 0,44980633497403878$
37;38	0,057189925647728383	$\pm 0,39341431189756512$
39;40	0,058600849813222445	$\pm 0,33550024541943735$
41;42	0,059785058704265457	$\pm 0,27628819377953199$
43;44	0,060737970841770216	$\pm 0,21600723687604175$
45;46	0,061455899590316663	$\pm 0,15489058999814590$
47;48	0,061936067420683243	$\pm 0,093174701560086140$
49;50	0,062176616655347262	$\pm 0,031098338327188876$

Apêndice B

Referencial do Centro de Massa

O problema do movimento de um sistema composto por duas partículas que interagem entre si, fica consideravelmente simplificado se a origem do sistema de coordenadas for colocada no centro de massa do sistema.

Se no sistema de referência do laboratório as partículas tiverem vetores posição \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 e a energia potencial de interação depender apenas da distância entre elas então a energia total é dada por

$$E = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \quad (\text{B.1})$$

sendo que m_1 e m_2 são as massas das partículas e U é o potencial de interação entre elas. O vetor \mathbf{r}_{cm} do centro de massa do sistema é dado por

$$(m_1 + m_2)\mathbf{r}_{\text{cm}} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2. \quad (\text{B.2})$$

Se colocarmos a origem do sistema de coordenadas no centro de massa então essa equação se reduz a

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0. \quad (\text{B.3})$$

Se definirmos $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ e combinar-mos com (B.3) teremos:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \mathbf{r}; \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \mathbf{r}. \quad (\text{B.5})$$

Derivando estas equações em relação ao tempo e substituindo em (B.1) obtemos

$$E = \frac{\mu \dot{\mathbf{r}}^2}{2} + U(\mathbf{r}), \quad (\text{B.5})$$

sendo que

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \quad (\text{B.6})$$

é a grandeza conhecida como massa reduzida. Assim a equação (B.5) pode ser interpretada como a energia total de uma única partícula de massa μ submetida a ação de uma força central.

Apêndice C

Seção de Choque de Rutherford

No apêndice A vimos que o problema de duas partículas que interagem entre si pode ser reduzido ao problema de uma única partícula de massa μ submetida a ação de uma força central. Assim, em coordenadas polares r e ϕ , a energia total é dada por

$$E = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + \dot{\phi}^2 r^2) + U(r) \quad (C.1)$$

e o momento angular por

$$L = \mu r^2 \dot{\phi} . \quad (C.2)$$

Substituindo em C.1 teremos

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r) , \quad (C.3)$$

de onde tiramos, lembrando que $\dot{r} = dr / dt$

$$dr = \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U(r)] - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}} dt . \quad (C.4)$$

Isolando dt em (C.2), substituindo em (C.4) e integrando obtemos

$$\phi = \int \frac{L}{r^2 \sqrt{2\mu[E - U(r)] - L^2 / r^2}} dr + \text{constante}. \quad (C.5)$$

Esta é a equação da trajetória da partícula que dá uma relação entre ϕ e r . A trajetória de uma partícula em um campo central é simétrica em relação a uma reta que passa pela origem e pelo ponto da trajetória que passa mais perto desta, conforme mostra a figura (C.1) onde θ é o ângulo de deflexão, ϕ_0 é o ângulo polar correspondente a distância de menor aproximação ao centro de força e ρ é o parâmetro de impacto que corresponde a distância que a partícula passaria da origem se o campo de força não existisse.

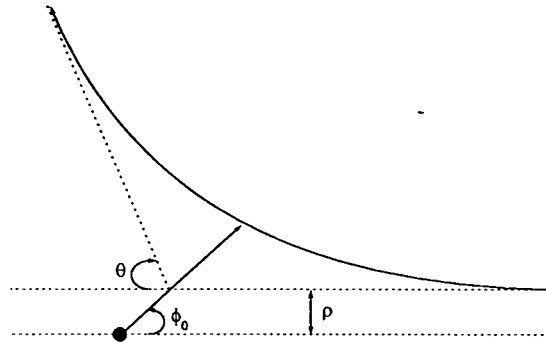


Figura C.1 trajetória de uma partícula que vem do infinito e passa perto de um centro de força. As principais variáveis envolvidas são também mostradas..

De acordo com (C.5) o ângulo ϕ_0 é dado por

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{L}{r^2 \sqrt{2\mu[E - U(r)] - L^2 / r^2}} dr, \quad (C.6)$$

onde r_{\min} é a distância de menor aproximação ao centro de força. Quando a partícula está no infinito temos que:

$$E = \frac{\mu v_{\infty}^2}{2}; \quad (C.7)$$

$$L = \mu \rho v_{\infty}, \quad (C.8)$$

sendo que v_∞ é a velocidade da partícula quando ela está no infinito. Se o sistema for considerado como conservativo então podemos substituir estas equações em (C.6) obtendo

$$\phi = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu v_\infty^2}}} dr . \quad (C.9)$$

Em física é muito comum tratar, ao invés do desvio de uma partícula, do espalhamento de um feixe de partículas semelhantes que chegam ao centro espalhador com a mesma energia E . As partículas tem parâmetros de impacto diferentes, portanto são espalhadas com diferentes ângulos θ . O número dN de partículas que são espalhadas por unidade de tempo entre os ângulos θ e $\theta + d\theta$ não é adequado para caracterizar o processo de espalhamento, pois depende da densidade do feixe incidente. Por isto introduzimos também o número n de partículas que são espalhadas por unidade de tempo e por unidade de área de uma seção reta do feixe. Assim definimos

$$d\sigma = \frac{dN}{n}, \quad (C.10)$$

que tem dimensão de área e é chamado seção de choque de espalhamento. Supondo que o ângulo θ seja uma função decrescente de ρ para todos os valores considerados, então as partículas com parâmetro de impacto entre ρ e $\rho + d\rho$ serão espalhadas entre os ângulos θ e $\theta + d\theta$. Assim, se imaginar-mos um anel compreendido entre as circunferências de raio ρ e $\rho + d\rho$, perpendicular a direção da velocidade da partícula quando está no infinito e centrado no centro espalhador, então o número dN será igual a n vezes a área deste anel ou seja

$$dN = n 2\pi \rho d\rho, \quad (C.11)$$

de onde tiramos

$$\frac{dN}{n} = 2\pi\rho d\rho = d\sigma. \quad (C.12)$$

Para achar a relação entre o ângulo de espalhamento e a seção de choque $d\sigma$ é preciso escrever (C.12) na forma

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta)\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|d\theta, \quad (C.13)$$

onde a derivada tem barras de valor absoluto pois pode ser negativa. É muito comum relacionar $d\sigma$ com o elemento de ângulo sólido $d\Omega$, que corresponde a uma área elementar localizada entre os ângulos θ e $\theta + d\theta$, sobre uma esfera de raio 1 centrada no centro espalhador ou seja

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (C.14)$$

Isolando $d\theta$ nesta expressão e substituindo em (C.13) teremos

$$d\sigma = \frac{\rho(\theta)}{\sin \theta} \left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\Omega. \quad (C.15)$$

Considerando o potencial em (C.6) como sendo o potencial coulombiano $V_c = Z_1 Z_2 e^2 / r$ e integrando obtemos

$$\phi_0 = \arccos \left(\frac{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu v_\infty \rho}}{\sqrt{1 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu v_\infty^2 \rho}}} \right). \quad (C.16)$$

da figura C.1 tiramos que

$$\phi_0 = \frac{(\pi - \theta)}{2}. \quad (\text{C.17})$$

Após substituir esta expressão em (C.16), isolar ρ , derivar ρ em relação a θ e substituir em (C.15) teremos

$$d\sigma = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} d\Omega \quad (\text{C.18})$$

ou

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{4 \sin^4(\theta/2)} \quad (\text{C.19})$$

esta é a conhecida seção de choque diferencial de Rutherford.

Apêndice D

Nas equações (3.13), (3.17) e (3.22) temos que trabalhar com integrais que tem a forma

$$I = \int_{r_c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r^2 - Br - C}} g(r) dr, \quad (D.1)$$

sendo que r_c é raiz do polinômio dentro da raiz no denominador e $g(r)$ é uma função de r tal que $g(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. Para resolver numericamente uma integral deste tipo é necessário eliminar o zero no denominador. O primeiro passo para alcançar este objetivo é colocar a integral (D.1) na forma

$$I = \int_{r_c}^{\infty} \frac{(2r - B)}{\sqrt{r^2 - Br - C}} \frac{g(r)}{(2r - B)} dr \quad (D.2)$$

e a seguir aplicar a fórmula de integração por partes

$$\int_{r_c}^{\infty} u dv = [uv]_{r_c}^{\infty} - \int_{r_c}^{\infty} v du, \quad (D.3)$$

sendo que:

$$u = \frac{g(r)}{(2r - B)}; \quad (D.4)$$

$$du = \left[\frac{g'(r)}{(2r - B)} - \frac{2g(r)}{(2r - B)^2} \right]; \quad (D.5)$$

$$dv = \frac{(2r - B)}{\sqrt{r^2 - Br - C}}; \quad (D.6)$$

$$v = 2\sqrt{r^2 - Br - C}; \quad (D.7)$$

substituindo em (D.3) teremos

$$I = \left[\frac{2g(r)}{(2r - B)} \sqrt{r^2 - br - C} \right]_{r_c}^{\infty} - 2 \int_{r_c}^{\infty} \sqrt{r^2 - Br - C} \left[\frac{g'(r)}{(2r - B)} - \frac{2g(r)}{(2r - B)^2} \right] dr. \quad (D.8)$$

O primeiro termo se anula quando aplicamos o limite inferior de integração pois r_c é raiz do polinômio dentro do radicando. Podemos colocar (D.8) na forma

$$I = \left[\frac{2g(r)}{(2 - B/r)} \sqrt{1 - \frac{b}{r} - \frac{C}{r^2}} \right]_{r_c}^{\infty} - 2 \int_{r_c}^{\infty} \sqrt{r^2 - Br - C} \left[\frac{g'(r)}{(2r - B)} - \frac{2g(r)}{(2r - B)^2} \right] dr, \quad (D.9)$$

onde é fácil ver que o primeiro termo também se anula quando aplicamos o limite superior de integração pois $g(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. Assim a integral (D.1) pode ser escrita como

$$\int_{r_c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r^2 - Br - C}} g(r) dr = -2 \int_{r_c}^{\infty} \sqrt{r^2 - Br - C} \left[\frac{g'(r)}{(2r - B)} - \frac{2g(r)}{(2r - B)^2} \right] dr. \quad (D.10)$$

Apêndice E

Nas equações (3.16) e (3.21) temos que trabalhar com derivadas do tipo

$$\frac{d}{d\ell} \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \sqrt{r^2 - Br - C(\ell)} g(r) dr, \quad (E.1)$$

onde $r_c(\ell)$ é raiz do polinômio dentro do radicando e $g(r)$ é uma função de r tal que $g(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. A fórmula para a derivação de uma integral em relação a um parâmetro ℓ é [22]

$$\frac{d}{d\ell} \int_{\phi(\ell)}^{\psi(\ell)} h(r, \ell) dr = \int_{\phi(\ell)}^{\psi(\ell)} \frac{d}{d\ell} h(r, \ell) dr + h(\psi(\ell), \ell) \frac{d}{d\ell} \psi(\ell) - h(\phi(\ell), \ell) \frac{d}{d\ell} \phi(\ell). \quad (E.2)$$

Comparando esta fórmula com a equação (E.1) vemos que $\psi(\ell) = \infty$, $\phi(\ell) = r_c(\ell)$ e $h(r, \ell) = \sqrt{r^2 - Br - C(\ell)} g(r)$, o que implica que o segundo termo na fórmula (E.2) se anula pois $\psi(\ell)$ é constante e o terceiro termo também se anula pois $r_c(\ell)$ é raiz do polinômio dentro da raiz. Assim (E.1) será igual a

$$\frac{d}{d\ell} \int_{r_c(\ell)}^{\infty} \sqrt{r^2 - Br - C(\ell)} g(r) dr = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\ell} C(\ell) \left[\int_{r_c(\ell)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r^2 - Br - C(\ell)}} g(r) dr \right]. \quad (E.3)$$

Referências Bibliográficas

- [1] K. N. Huang, Phys. Rev. A 14, 1311 (1976)
- [2] Para uma análise do Lamb shift veja por exemplo J. J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics (Addison-Wesley, Reading, MA, 1967)
- [3] L. Spruch, Phys. Today, 39, 37 (1986)
- [4] J. Lucinda, J. Phys. A: Math. Gen. 24, 1759 (1991)
- [5] Veja por exemplo R. Eisberg e R. Resnick, Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei and Particles (New York: Cambridge University Press, 1974)
- [6] L. N. Ivanov, E. P. Ivanova e E. V. Aglitsky, Phys. Rep. 154, 315 (1988)
- [7] D. Vetterli et. al., Phys. Rev. Lett. 62, 1453 (1989)
- [8] M. S. Hussein, C. L. Lima, M. P. Pato e C. A. Bertulani Phys. Rev. Lett 65, 839 (1990)
- [9] A. C. C. Villari et. al., Phys. Rev. Lett. 71, 2551 (1993)
- [10] E. A. Ueling, Phys. Rev. 48, 55 (1935)
- [11] G. Källén e A. Sabry, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat-fys. Medd. 29, n° 17 (1955)
- [12] L. W. Fullerton e G. A. Rinker, Phys. Rev. A 13, 1283 (1976)
- [13] M. S. Hussein, A. J. Baltz e B. V. Carlson, Phys. Rep. 113, 133 (1984)
- [14] G. Baur, F. Rösel e D. Trautman, Nucl. Phys. A 288, 113 (1977)
- [15] M. S. Hussein, V. L. M. Franzini e A. J. Baltz, Phys. Rev. C 30, 184 (1984)
- [16] R. Karplus e N. M. Kroll, Phys. Rev. 77, 540 (1950)
- [17] J. Blomqvist, Nucl. Phys. B 48, 95 (1972)
- [18] W. Lynch et. al., Phys. Rev. Lett 48, 979 (1982)
- [19] C. J. Joachain, Quantum Collision Theory (North Holland Physics Publishing, 1975)
- [20] L. C. Barroso, M. M. A. Barroso, F. F. Campos Filho, M. L. B. Carvalho e M. L. Maia Cálculo numérico com Aplicações 2ª edição (Editora Harbra, 1987)
- [21] M. Abramowitz e I. A. Stegun, Handbook of Mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables (National Bureau of Standards Applied Mathematics series.55, 1964)
- [22] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, Table of Integrals, series and products (Academic press, Boston, 1980)